# Systemy baz danych

*Notatki z wykładu*

http://robert.brainusers.net

17.06.2009

Notatki własne z wykładu. Są niekompletne, bez bibliografii oraz mogą zawierać błędy i usterki. Z tego powodu niniejszy dokument może być wykorzystywany jedynie do celów własnych, poglądowych, niekomercyjnych. Przedstawione teorie nie mogą być traktowane bezkrytycznie.

## 1. Relacje

### 1.1. Pojęcie relacji

**Definicja 1.1.1** (Domena atrybutu)**.** Niech $U = \{A_1, \ldots, A_n\}$ będzie skończonym zbiorem atrybutów $A_i$. Domeną atrybutu $A$ nazywamy zakres wszystkich wartości, jakie przyjmuje ten atrybut, ozn. $DOM(A)$.

**Definicja 1.1.2** (Relacja)**.** Relacją $R(U)$ nazywamy pozbiór iloczynu kartezjańskiego domen atrybutów ze zbioru $U$:

$$R(U) \subseteq DOM(A_1) \times \cdots \times DOM(A_n), \quad A_i \in U$$

W praktyce porządek domen nie jest ważny, bo odwołujemy się do atrybutu poprzez jego nazwę.

**Definicja 1.1.3** (Krotka typu $U$)**.** Krotką typu $U$ nazywamy dowolną funkcję

$$r : U \to \bigcup_{A \in U} DOM(A)$$

taką że

$$r(A_i) \in DOM(A_i), \quad A_i \in U$$

i krótko zapisujemy $r(U)$.
Zbiór wszystkich krotek typu $U$ oznaczmy $KROTKA(U)$.

**Definicja 1.1.4** (Wartość prosta, atrybut prosty)**.** Wartość $a \in DOM(A)$ jest prosta, jeżeli nie jest ona zbiorem ani ciągiem atrybutów należących do $\bigcup_{A \in U} DOM(A)$.
Atrybut $A \in U$ nazywamy atrybutem prostym, jeżeli wszystkie jego wartości są proste.

Od tej chwili zakładamy, że wszystkie atrybuty są proste.

**Definicja 1.1.5** (1PN)**.** Mówimy, że relacja $R(U)$ jest znormalizowana, lub że jest w pierwszej postaci normalnej (ozn. 1PN), jeżeli każdy atrybut $A \in U$ jest atrybutem prostym.

## 1.2. Operacje na krotkach

Niech $r$ będzie krotką typu $U$.

**Definicja 1.2.1** (Ograniczenie krotki)**.** Niech $X \subset U$. Krotkę $r[X]$ nazywamy ograniczeniem krotki $r$ do zbioru $X$, gdy dla wszystkich atrybutów $A \subset X$ wartości tych krotek są równe.

**Definicja 1.2.2** (Złączenie krotek)**.** Weźmy $X, Y \subset U$ i krotki $r(X)$, $s(Y)$. Złączeniem krotek $r$ i $s$ nazywamy krotkę $t(X \cup Y)$, taką że $t[X] = r$ oraz $t[Y] = s$ i oznaczamy $r \bowtie s$.

**Uwaga 1.2.1.** Złączenie krotek jest przemienne i łączne.

## 1.3. Operacje na relacjach

**Definicja 1.3.1** (Suma relacji)**.**

$$R(U) \cup S(U) = \{t \in KROTKA(U) : \ t \in R(U) \ \vee \ t \in S(U)\}$$

**Definicja 1.3.2** (Różnica relacji)**.**

$$R(U) \setminus S(U) = \{t \in KROTKA(U) : \ t \in R(U) \ \wedge \ t \notin S(U)\}$$

**Definicja 1.3.3** (Iloczyn relacji)**.**

$$R(U) \cap S(U) = \{t \in KROTKA(U) : \ t \in R(U) \ \wedge \ t \in S(U)\}$$

**Definicja 1.3.4** (Dopełnienie relacji)**.**

$$\overline{R(U)} = \{t \in KROTKA(U) : \ t \notin R(U)\}$$

Dopełnienie jest dobrze zdefiniowane, gdy $KROTKA(U)$ jest zbiorem skończonym.

**Definicja 1.3.5** (Projekcja)**.** Niech $R(U)$ i $X \subset U$. Relację $R[X]$ nazywamy projekcją (rzutem) relacji $R$ na zbiór atrybutów $X$, gdy

$$R[X] = \{t \in KROTKA(X) : \ \bigvee_{r \in R} r[X] = t\}$$

**Definicja 1.3.6** (Selekcja)**.** Niech $A, B \in U$, $v \in \bigcup_{A \in U} DOM(A)$ (wartość pewnego atrybutu) i niech $\Theta$ będzie zbiorem pewnych relacji. Elementarnym warunkiem selekcji nazywamy wyrażenie logiczne $A\theta B$ lub $A\theta v$ gdzie $\theta \in \Theta$. Warunek selekcji definiujemy następująco. Każdy elementalny warunek selekcji jest warunkiem selekcji; ponadto jeżeli $E, E'$ są warunkami selekcji to $E \vee E'$, $E \wedge E'$ i $\sim E$ też są warunkami selekcji.
Relację $T(U)$ nazywamy selekcją relacji $R(U)$ z warunkiem selekcji $E$, gdy jest ona zbiorem tylko tych krotek, które spełniają warunek selekcji.

**Definicja 1.3.7** (Złączenie relacji)**.**

$$R \bowtie S = \{t \in KROTKA(R \cup S) : \ t[X] \in R \ \wedge \ t[Y] \in S\}$$

**Uwaga 1.3.1.** Złączenie relacji jest przemienne i łączne.

## 1.4. Zależności funkcyjne

W kontekście zależności fukncyjnych rodzinę atrybutów $\{A, B\}$ będziemy krótko oznaczać $AB$, a nawet $\{A\}$ jako $A$.

**Definicja 1.4.1** (Zależności funkcyjne)**.** Niech $X, Y \subset U$ będą rodzinami atrybutów. Mówimy, że w relacji $R(U)$ zachodzi zależność funkcyjna $X \to Y$, gdy dla każdych dwóch krotek $r_1, r_2 \in R$ zachodzi

$$r_1[X] = r_2[X] \quad \Longrightarrow \quad r_1[Y] = r_2[Y]$$

**Definicja 1.4.2** (Dopełnienie zbioru zależności funkcyjnych)**.** Niech $F \subseteq \{X \to Y : \; X, Y \subset U\}$ będzie zbiorem zależności funkcyjnych. Przez $F^+$ oznaczamy najmniejszy zbiór zależności fukncyjnych, który zawiera $F$ oraz jest zamknięty na aksjomaty Armstronga:
(F1) $Y \subset X \implies X \to Y \in F^+$ (pseudozwrotność)
(F2) $X \to Y \in F^+ \implies XZ \to YZ \in F^+$ (poszerzalność)
(F3) $X \to Y \in F^+ \;\wedge\; Y \to Z \in F^+ \implies X \to Z \in F^+$ (przechodniość)

**Twierdzenie 1.4.1.** Układ aksjomatów Armstronga jest niesprzeczny oraz zupełny.

**Wniosek 1.4.2.** Można wyprowadzić z aksjomatów Armstronga następujące zależności:
(F4) $X \to Y \in F^+ \;\wedge\; YW \to X \in F^+ \implies XW \to Z \in F^+$ (pseudoprzechodniość)
(F5) $X \to Y \in F^+ \;\wedge\; X \to Z \in F^+ \implies X \to YZ \in F^+$ (addytywność)
(F6) $X \to YZ \in F^+ \implies X \to Y \in F^+ \;\wedge\; X \to Z \in F^+$ (dekompozycyjność)

*Dowód.* (F4) $X \to Y \in F^+ \overset{(F2)}{\Rightarrow} XW \to YW \in F^+$ oraz $YW \to Z \in F^+$ (z założenia). Stąd z (F3) $XW \to Z \in F^+$.
(F5) Z poszerzalności mamy $XX = X \to YX \in F^+$ oraz $XY \to ZY \in F^+$. Stąd na podstawie (F3) $X \to YZ \in F^+$.
(F6) Ze zwrotności mamy $YZ \to Y \in F^+$ oraz $Z \to Z \in F^+$. Skoro $X \to YZ \in F^+$ to z przechodniości otrzymujemy $X \to Y \in F^+$ oraz $X \to Z \in F^+$. □

**Definicja 1.4.3** (Minimalny generator zależności funkcyjnych)**.** Niech $F_0 \subset F$ będzie takim podzbiorem, że $F_0^+ = F^+$. Wówczas najmniejszy zbiór $F_0$ nazywamy minimalnym generatorem zależności funkcyjnych w $F$.

Jeżeli $F_0$ jest minimalnym generatorem z lewymi stronami zależności funkcyjnych o mocy 1 to nazywamy go minimalnym zredukowanym generatorem zależności funkcyjnych w $F$.

**Definicja 1.4.4** (Domknięcie zbioru atrybutów)**.** Niech $X \subset U$. Domknięciem zbioru atrybutów $X$ nazywamy zbiór

$$X^+ = \{A \subset U : \; X \to A \in F^+\}$$

**Wniosek 1.4.3.** 1) $X \subset X^+$ (wynika z F1)
2) $(X^+)^+ = X^+$
3) $X \subset Y \implies X^+ \subset Y^+$

**Twierdzenie 1.4.4.** Niech $X, Y \subset U$. Wtedy

$$X \to Y \in F^+ \iff Y \in X^+$$

*Dowód.* ($\Leftarrow$) $Y = \{A_1, \dots, A_n\} \in X^+ \in U$.
Z definicji $X^+$: $X \to A_i \in F^+$. Z (F5) mamy $X \to A_1 A_2 \dots A_n \in F^+$. Stąd $X \to Y \in F^+$.

($\Rightarrow$) Załóżmy, że $X \to Y \in F^+$.
$Y = A_1, \dots, A_n$, więc z (F1): $Y \to A_i \in F^+$. Teraz (F3): $X \to A_i \in F^+$.
Z definicji $X^+$ mamy $A_i \in X^+$, czyli $Y = \bigcup A_i \in X^+$. Stąd $Y \in X^+$. $\square$

## 1.5. Schematy relacyjne

**Definicja 1.5.1** (Schemat relacyjny)**.** Niech $F$ będzie zbiorem zależności funkcyjnych nad $U$. Parę $\mathcal{R} = (U, F)$ nazywamy schematem relacyjnym nad $U$ ze zbiorem zależności funkcyjnych $F$.

**Definicja 1.5.2** (Instancja schematu)**.** Relację $R(U)$ nazywamy instancją (przypadkiem) schematu $\mathcal{R} = (U, F)$ jeżeli zachodzi w niej każda zależność funkcyjna z $F$.
Zbiór wszystkich instancji schematu $\mathcal{R}$ oznaczamy $INST(\mathcal{R})$.

**Definicja 1.5.3** (Projekcja schematu)**.** Niech $X \subset U$. Schemat $\mathcal{R}[X] = (X, G)$ nazywamy projekcją (rzutem) schematu $\mathcal{R}$ na zbiór atrybutów $X$, jeżeli

$$G^+ = \{Y \to Z \in F^+ : \ YZ \subset X\}^+$$

**Definicja 1.5.4** (Złączenie schematów)**.** Niech $\mathcal{R} = (X, F)$, $\mathcal{S} = (Y, G)$. Schemat $\mathcal{T} = (X \cup Y, (F \cup G)^+)$ nazywamy złączeniem schematów relacyjnych.

## 1.6. Rozkładalność schematów relacyjnych

**Definicja 1.6.1** (Rozkładalność bez straty danych)**.** Mówimy, że schemat $\mathcal{R}$ jest rozkładalny bez straty danych na schematy $\mathcal{R}[X]$ i $\mathcal{R}[Y]$, gdy
1) $X \cup Y = U$
2) $\bigwedge_{R \in INST(\mathcal{R})} \quad R = R[X] \bowtie R[Y]$

**Twierdzenie 1.6.1.** Jeśli $X \to Y \in F^+$ to schemat relacyjny $\mathcal{R}$ jest rozkładalny bez straty danych na schematy $\mathcal{R}[XY]$ oraz $\mathcal{R}[XZ]$, gdzie $XYZ = U$, $Y \cap Z = \emptyset$.

Natomiast jeśli schemat relacyjny $\mathcal{R}$ jest rozkładalny bez straty danych na schematy $\mathcal{R}[XY]$ i $\mathcal{R}[XZ]$ (gdzie $XYZ = U$, $Y \cap Z = \emptyset$) to $X \to Y \in F^+$ lub $X \to Z \in F^+$.

**Definicja 1.6.2** (Rozkładalność bez straty zależności funkcyjnych)**.** Mówimy, że schemat relacyjny $\mathcal{R} = (U, F)$ jest rozkładalny bez straty zależności funkcyjnych na schematy $\mathcal{R}_1 = (X, G)$ oraz $\mathcal{R}_2 = (Y, H)$ gdy
1) $X \cup Y = U$
2) $(G \cup H)^+ = F^+$

**Definicja 1.6.3** (Rozkładalność bez straty danych i zależności funkcyjnych)**.** Mówimy, że schemat relacyjny $\mathcal{R} = (U, F)$ jest rozkładalny bez straty danych i zależności funkcyjnych na schematy $\mathcal{S} = (X, G)$ oraz $\mathcal{T} = (Y, H)$ gdy
1) $X \cup Y = U$
2) $(G \cup H)^+ = F^+$
3) $R \in INST(\mathcal{R}) \implies R[X] \bowtie R[Y] = R$
Taki rozkład nazywamy rozkładem na składowe niezależne.

**Twierdzenie 1.6.2.** Niech $X, y \subset U$ oraz $X, Y$ mają niepusty przekrój. Projekcje $\mathcal{S} = \mathcal{R}[X] = (X, G)$, $\mathcal{T} = \mathcal{R}[Y] = (Y, H)$ są niezależnymi składowym schematu $\mathcal{R}$ wtedy i tylko wtedy gdy
1) $X \cup Y = U$
2) $F^+ = (G \cup H)^+$
3) $X \cap Y \to X \in F^+$ lub $X \cap Y \to Y \in F^+$.

# 2. Normalizacja schematów relacyjnych

## 2.1. Pojęcie klucza

**Definicja 2.1.1** (Klucz schematu)**.** Zbiór atrybutów $K \subset U$ nazywamy kluczem schematu $\mathcal{R}$ gdy
1) $K \to U \in F^+$
2) $X \to U \in F^+ \implies X$ nie jest podzbiorem właściwym zbioru $K$ (minimalność).
W literaturze klucz nazywa się często kluczem kandydującym.

**Definicja 2.1.2** (Nadklucz)**.** Każdy zbiór, który zawiera klucz, np. $ABK$.

## 2.2. Sprowadzanie schematów relacyjnych do 2PN

**Definicja 2.2.1** (Pełna zależność funkcyjna)**.** Niech $X, Y \subset U$, $X \cap Y = \emptyset$. Mówimy, że $Y$ jest w pełni zależny od $X$ jeżeli $X \to Y \in F$ i nie jest zależny od żadnego właściwiego podzbioru $X$ (zmniejszenie $X$ spowoduje utratę zależności).

**Definicja 2.2.2** (2PN)**.** Mówimy, że schemat $\mathcal{R}$ jest w drugiej postaci normalnej (2PN) jeżeli każdy niekluczowy atrybut $A \in U$ jest w pełni funkcyjnie zależny od każdego klucza tego schematu.

**Uwaga 2.2.1.** Jeżeli w schemacie istnieje tylko jeden klucz lub nie ma atrybutów niekluczowych to schemat jest już w 2PN.

**Uwaga 2.2.2** (Algorytm sprowadzania do 2PN)**.** Jeśli istnieje klucz $K \subset U$, że dla pewnego $K' \subset K$ i $X \subset U$ zachodzi $K' \to X \in F^+$ to rozłóż schemat na dwa rzuty:

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}[U_1] = (U_1, F_1), \qquad \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}[U_2] = (U_2, F_2)$$

gdzie $U_1 = K'X$, $U_2 = K'(U \setminus X)$ oraz $F_1$, $F_2$ są generatorami zależności funkcyjnych w tych schematach. Wykonaj algorytm ponownie dla powstałych składowych. Otrzymany rozkład nie jest jednoznacznie określony. Staramy się rozkładać na możliwie najmniejszą liczbę składowych.

## 2.3. Trzecia postać normalna

**Definicja 2.3.1** (Zależność tranzytywna)**.** Niech $A \to B \in F^+$ i $B \to C \in F^+$. Mówimy, że zbiór atrybutów $C$ jest tranzytywnie zależny od $A$ jeżeli $A$ nie jest zależne ani od $B$ ani od $C$.

**Definicja 2.3.2** (3PN)**.** Mówimy, że schemat $\mathcal{R}$ jest w trzeciej postaci normalnej (3PN) jeżeli jest w 2PN oraz żaden atrybut niekluczowy nie jest tranzytywnie zależny od klucza.

**Uwaga 2.3.1.** Jeżeli w schemacie nie ma atrybutów niekluczowych to schemat jest już w 3PN.

**Uwaga 2.3.2** (Sprowadzanie schematu do 3PN)**.** Niech $K$ będzie kluczem schematu $\mathcal{R}$ i niech istnieje tranzytywna zależność $K \to X \to Y$ (tzn. nie istnieje zależność funkcyjna $X \to K$). Aby rozłożyć schemat na składowe będące w 3PN należy rozkładać go, podobnie jak poprzednio, lecz względem zależności $X \to Y$. Jeśli składowe nie są w 3PN, rozkładamy je ponownie.

## 2.4. Postać normalna Boyce'a-Codda

**Definicja 2.4.1** (BCNF)**.** Mówimy, że schemat $\mathcal{R}$ jest w postaci normalnej Boyce'a-Codda, jeżeli dla każdej zależności funkcyjnej $X \to Y$ (gdzie $Y$ nie zawiera się w $X$) prawdą jest, że $X$ jest kluczem lub nadkluczem.

**Uwaga 2.4.1.** Jeśli schemat jest w BCNF to jest w 3PN.

**Uwaga 2.4.2** (Sprowadzanie schematu do BCNF)**.** Jeśli w schemacie relacyjnym istnieje zależność funkcyjna $X \to Y$ i $X$ nie jest kluczem ani nadkluczem, należy rozkładać go na składowe, podobnie jak poprzednio, lecz względem tej zależności. Jeśli składowe nie są w BCNF, rozkładamy je ponownie.

## 2.5. Czwarta postać normalna

**Definicja 2.5.1** (Zależność wielowartościowa)**.** Niech $R$ będzie instancją schematu $\mathcal{R}$, atrybuty $X, Y, Z \subset U$, $XYZ = U$ oraz krotki $x \in R[X]$, $y, y' \in R[Y]$, $z, z' \in R[Z]$. Mówimy, że zachodzi zależność wielowartościowa z $X$ do $Y$ (ozn. $X \to\to Y$) jeżeli z tego, że

$$x \bowtie y \bowtie z \in R \quad \wedge \quad x \bowtie y' \bowtie z' \in R$$

wynika

$$x \bowtie y \bowtie z' \in R \quad \wedge \quad x \bowtie y' \bowtie z \in R$$

Zależność wielowartościową $X \to\to Y$ nazywamy trywialną, gdy $XY = U$.

**Uwaga 2.5.1.** Zależność funkcyjna $X \to Y$ pociąga za sobą zależność wielowartościową $X \to\to Y$.

**Definicja 2.5.2** (4PN)**.** Mówimy, że schemat $\mathcal{R}$ jest w czwartej postaci normalnej, jeżeli każda nietrywialna zależność wielowartościowa wynika z klucza lub nadklucza.

**Uwaga 2.5.2** (Sprowadzanie schematu do 4PN)**.** Jeśli w schemacie relacyjnym istnieje zależność wielowartościowa $X \to\to Y$ która nie wynika z klucza ani nadklucza i jeśli istnieje zależność funkcyjna $X \to Y$, należy rozkładać schemat na składowe, podobnie jak poprzednio, lecz względem tej zależności. Jeśli składowe nie są w 4PN, rozkładamy je ponownie.