Równania różniczkowe

Notatki z wykładu

http://robert.brainusers.net

17.06.2009

Notatki własne z wykładu. Są niekompletne, bez bibliografii oraz mogą zawierać błędy i usterki. Z tego powodu niniejszy dokument może być wykorzystywany jedynie do celów własnych, poglądowych, niekomercyjnych. Przedstawione teorie nie mogą być traktowane bezkrytycznie.

Rozdział 2

Równania różniczkowe wyższych rzędów

2.1. Równania rzędu II sprowadzalne do równań rzędu I

Typ 1

$$F(t, x', x'') = 0$$

Podstawienie $x' = u$, gdzie $u = u(t)$. Wtedy $x'' = u'$ i równanie przyjmuje postać:

$$F(t, u, u') = 0$$

Przykład 2.1.1.

$$x'' = 1 + (x')^2$$

Postawienie $x' = u \Rightarrow x'' = u'$:

$$\begin{aligned}
u' &= 1 + u^2 \\
\int \frac{du}{1+u^2} &= \int dt \\
\operatorname{arctg} u &= t + c_1 \\
u &= \operatorname{tg}(t + c_1) \\
x' &= \operatorname{tg}(t + c_1) \\
x &= \int \operatorname{tg}(t + c_1) dt \\
x(t) &= -\ln|\cos(t + c_1)| + c_2
\end{aligned}$$

Typ 2

$$F(x, x', x'') = 0$$

Podstawienie $x' = v$, gdzie $v = v(x)$. Wtedy $x'' = v'x' = v'v$ i równanie przyjmue postać:

$$F(x, v, v') = 0$$

Przykład 2.1.2. $x'' = -x$

Podstawienie $x' = v \Rightarrow x'' = v'v$:

$$\begin{aligned}
v'v &= -x \quad \text{równanie o zmiennych rozdzielonych} \\
\int v dv &= \int -x dx \\
\frac{1}{2}v^2 &= c_1 - \frac{1}{2}x^2 \\
v(x) &= \pm\sqrt{c_1 - x^2} \\
x' &= \pm\sqrt{c_1 - x^2} \\
\int \frac{dx}{\sqrt{c_1 - x^2}} &= \int \pm dt \\
\arcsin \frac{x}{\sqrt{c_1}} &= c_2 \pm t \\
\frac{x}{\sqrt{c_1}} &= \sin(c_2 \pm t) \\
x(t) &= \sqrt{c_1} \sin(c_2 \pm t)
\end{aligned}$$

Typ 3

$$F(t, x, x', x'') = 0$$

Równanie jednorodne stopnia k, tzn.

$$\bigwedge_{\alpha\in\mathbb{R}} \quad F(t, \alpha x, \alpha x', \alpha x'') = \alpha^k F(t, x, x', x'')$$

Podstawienie $x = e^u$, gdzie $u = u(t)$. Wtedy $x' = u'e^u \Rightarrow x'' = (u')^2 e^u + u'' e^u$ i otrzymujemy równanie II rzędu typu 1.

Przykład 2.1.3. $xx'' - (x')^2 = 0$

Równanie jest jednorodne stopnia 2:

$$\begin{aligned} \alpha x \cdot \alpha x'' - (\alpha x')^2 &= 0 \\ \alpha^2 \cdot xx'' - \alpha^2 \cdot (x')^2 &= 0 \\ \alpha^2 \cdot (xx'' - (x')^2) &= 0 \end{aligned}$$

Niech $x = e^u \Rightarrow x' = u'e^u \Rightarrow x'' = (u')^2 e^u + u'' e^u$. Wtedy

$$\begin{aligned} e^u((u')^2 e^u + u'' e^u) - (u'e^u)^2 &= 0 \\ u'' e^2 u &= 0 \quad / : e^{2u} \neq 0 \\ u'' &= 0 \end{aligned}$$

Otrzmaliśmy równanie typu 1. Podstawienie $u' = v \Rightarrow u'' = v'$:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= 0 \\ \int dv &= \int 0 dt \\ v &= c_1 \\ u' &= c_1 \\ \int du &= \int c_1 dt \\ u &= c_1 t + c_2 \\ \ln|x| &= c_1 t + c_2 \\ x(t) &= \pm e^{c_1 t + c_2} \quad \text{Rozwiązanie ogólne} \end{aligned}$$

Rozwiązaniem jest również funkcja $x(t) \equiv 0$.

2.2. Równania liniowe II rzędu

Definicja 2.2.1 (Równanie liniowe II rzędu)**.**

$$x'' + b(t)x' + c(t)x = f(t)$$

gdzie $b(t)$, $c(t)$, $f(t)$ - dane funkcje zmiennej $t \in (a, b)$.

Zauważmy, że równanie to można sprowadzić do dwóch równań I rzędu. Istotnie, niech $y_1 = x$, $y_2 = x'$:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -c(t)y_1 - b(t)y_2 + f(t) \end{cases}$$

W notacji wektorowej:

$$y' = g(t, y)$$

gdzie $y = (y_1, y_2)$, $y' = (y_1', y_2')$, $g(t, y) = (y_2, -c(t)y_1 - b(t)y_2 + f(t))$.

Twierdzenie 2.2.1. Jeśli funkcje $b(t)$, $c(t)$, $f(t)$ są ciągłe dla $t \in (a, b)$ to zagadnienie Cauchy'ego postaci

$$\begin{cases} x'' + b(t)x' + c(t)x = f(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie dla każdego $t_0 \in (a, b)$.

Dowód. Zapisujemy równanie w postaci równania wektorowego:

$$y' = g(t, y)$$

gdzie $g(t, y) = (g_1(t, y), g_2(t, y)) = (y_2, -c(t)y_1 - bt)y_2 + f(t))$. Zauważmy, że funkcja $g'(t, y)$ jest ciągła na $(a, b) \times \mathbb{R}^2$. Ponadto g spełnia lokalny warunek Lipschitza względem zmiennej $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Istotnie, dla dowolnego $t \in (a, b)$, $\bar{y} = (\bar{y_1}, \bar{y_2})$, $\tilde{y} = (\tilde{y_1}, \tilde{y_2})$. Wykazujemy że

$$\|g(t, \bar{y}) - g(t, \tilde{y})\| \leq L\|\bar{y} - \tilde{y}\|$$

gdzie $L = \max\{c_1, 1 + c_2\}$. Zatem na mocy twierdzenia Picarda-Lindelöfa o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego, zagadnienie to ma dokładnie jedno rozwiązanie. $\square$

2.3. Układ fundamentalny rozwiązań równania liniowego jednorodnego

Rozważmy równanie liniowe jednorodne postaci

$$x'' + b(t)x' + c(t)x = 0$$

Definicja 2.3.1 (Układ fundamentalny rozwiązań)**.** Dwa rozwiązania $x_1(t)$, $x_2(t)$ równania $x'' + b(t)x' + c(t)x = 0$ tworzą jego fundamentalny układ rozwiązań jeżeli każde rozwiązanie $x(t)$ tego równania jest kombinacją liniową równań $x_1(t)$, $x_2(t)$:

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$$

gdzie c_1, c_2 - stałe.

Definicja 2.3.2 (Wyznacznik Wrońskiego)**.** Niech $x_1(t)$, $x_2(t)$ będą funkcjami różniczkowalnymi na (a, b). Wyrażenie

$$W(x_1(t), x_2(t)) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}$$

nazywamy wyznacznikiem Wrońskiego (wrońskianem) funkcji x_1, x_2.

Jeżeli $W(x_1(t), x_2(t)) \neq 0$ dla $t \in (a, b)$, to mówimy że układ funkcji x_1, x_2 jest liniowo niezależny na (a, b).

Lemat 2.3.1. Dwa rozwiązania $x_1(t)$, $x_2(t)$ równania liniowego jednorodnego tworzą jego fundamentalny układ rozwiązań na (a, b) $\iff$ $W(x_1(t), x_2(t)) \neq 0$ dla każdego $t \in (a, b)$.

Dowód. Niech $x(t)$ będzie dowolnym rozwiązaniem tego równania. Należy wykazać, że $x(t)$ jest kombinacją liniową rozwiązań x_1, x_2. Wówczas dowolnie ustalamy punkt $t_0 \in (a, b)$ i oznaczamy $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x_0^{(1)}$. Wyznaczymy stałe c_1, c_2 spełniające warunki:

$$\begin{cases} c_1x_1(t_0) + c_2x_2(t_0) = x_0 \\ c_1x_1'(t_0) + c_2x_2'(t_0) = x_0^{(1)} \end{cases}$$

Wiemy, że powyższy układ równań liniowych ze względu na c_1, c_2 ma dokładnie jedno rozwiązanie $\iff$ $x_1(t_0)x_2'(t_0) - x_2(t_0)x_1'(t_0) \neq\_0$, czyli $W(x_1(t), x_2(t)) \neq 0$. Zdefiniujmy funkcję $\bar{x}(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$. Funkcja $\bar(x)$ jest rozwiązaniem równania. Ponadto wobec doboru stałych mamy:

$$\bar{x}(t_0) = x_0, \qquad \bar{x}'(t_0) = x_0^{(1)}$$

Stąd, funkcja $\bar{x}(t)$ jest rozwiązaniem tego samego zagadnienia Cauchy'ego dla równania liniowego II rzędu. Otrzymujemy:

$$x(t) = \bar{x}(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

$\square$

Uwaga 2.3.1. W powyższym lemacie wystarczy założyć, że $W(x_1(t), x_2(t)) \neq 0$ dla pewnego punktu $t_0 \in (a, b)$. Można wykazać, że

$$\bigvee_{t_0 \in (a,b)} W(x_1(t_0), x_2(t_0)) \neq 0$$

implikuje

$$\bigwedge_{t \in (a,b)} W(x_1(t), x_2(t)) \neq 0$$

2.4. Fundamentalny układ rozwiązań równania liniowego jednorodnego o stałych współczynnikach

Rozważmy równanie

$$ax'' + bx' + cx = 0$$

gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Definicja 2.4.1 (Równanie charakterystyczne)**.** Równanie postaci

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

nazywamy równaniem charakterystycznym równania liniowego. Fundamentalny układ rozwiązań równania liniowego zależy od wyróżnika równania charakterystycznego $\Delta = b^2 - 4ac$.

Przypadek $\Delta > 0$

Równanie charakterystyczne ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste λ_1, λ_2. Wtedy fundamentalny układ rozwiązań równania liniowego tworzą funkcje postaci

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \qquad x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$

a rozwiązanie ogólnie równania liniowego ma postać

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

gdzie c_1, c_2 - stałe.

Przypadek $\Delta = 0$

Równanie charakterystyczne ma jeden podwójny pierwiastek rzeczywisty λ_0. Wtedy fundamentalny układ rozwiązań równania liniowego tworzą funkcje postaci

$$x_1(t) = e^{\lambda_0 t}, \qquad x_2(t) = te^{\lambda_0 t}$$

a rozwiązanie ogólne ma postać

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_0 t} c_2 t e^{\lambda_0 t} = e^{\lambda_0 t}(c_1 + c_2 t)$$

Przypadek $\Delta < 0$

Równanie charakterystyczne ma dwa zespolone pierwiastki $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, gdzie

$$\alpha = -\frac{b}{2a}, \qquad \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Wtedy fundamentalny układ rozwiązań równania liniowego tworzą funkcje

$$x_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t), \qquad x_2(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

a rozwiązanie ogólne ma postać

$$x(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t}\sin(\beta t) = e^{\alpha t}(c_1\cos(\beta t) + c_2\sin(\beta t))$$

Przykład 2.4.1. Rozwiązać równanie $x'' + 2x' + 1 = 0$.
Równanie charakterystyczne: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \iff (\lambda+1)^2 = 0$. Zatem $\lambda_0 = -1$ jest podwójnym pierwiastkiem tego równania (przypadek 2). Stąd fundamentalny układ rozwiązań ma postać:

$$x_1(t) = e^{-t}, \qquad x_2(t) = te^{-t}$$

Rozwiązanie ogólne:

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$$

2.5. Równania liniowe niejednorodne o stałych współczynnikach

Rozważmy równanie

$$ax'' + bx' + cx = f(t)$$

gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $f(t)$ - dana funkcja.

Jeżeli funkcje $x_1(t), x_2(t)$ tworzą fundamentalny układ rozwiązań równania liniowego jednorodnego $ax''+bx'+cx = 0$ to rozwiązanie ogólnie $x(t)$ równania niejednorodnego można przedstawić w postaci sumy rozwiązania ogólnego równania jednorodnego oraz dowolnego rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego:

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + x_3(t)$$

gdzie $x_3(t)$ jest rozwiązaniem szczególnym równania niejednorodnego. Powyższy fakt zachodzi również dla równań liniowych o współczynnikach zmiennej t $(x'' + b(t)x' + c(t)x = f(t))$.

2.5.1. Wyznaczanie rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego. Metoda przewidywań.

W przypadku szczególnej postaci prawej strony równania (funkcji $f(t)$) możemy przewidzieć ogólną postać rozwiązania szczególnego $x_s(t)$ tego równania.

Przypadek $f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$

Przewidujemy

$$x_s(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k$$

W celu wyznaczenia współczynników α_k wstawiamy funkcję $x_s(t)$ do równania różniczkowego. Otrzymujemy:

$$a(n(n-1)\alpha_n t^{n-2} + \cdots + \alpha_2) + b(n\alpha_n t^{n-1} + \cdots + \alpha_1) + c(\alpha_n t^n + \cdots + \alpha_0) = a_n t^n + \cdots + a_0$$

Porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach t dostajemy układ n+1 równań liniowych o współczynnikach α_k:

$$\begin{cases} c\alpha_n = a_n \\ c\alpha_{n-1} + bn\alpha_n = a_{n-1} \\ \vdots \end{cases}$$

Układ ten będzie miał jednoznaczne rozwiązanie o ile $c \neq 0$.

Jeśli $c = 0$ to lewa strona równania różniczkowego nie jest wielomianem stopnia n. Wtedy należy przewidywać

$$x_s(t) = (\sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k) \cdot t$$

Wstawiając $x_s(t)$ do równania różniczkowego z odpowiedniego układu równań wyznaczamy współczynniki $\alpha_0, \ldots \alpha_n$. Będzie to możliwe o ile $b \neq 0$.

Jeżeli $b = 0$ to należy przewidywać

$$x_s(t) = (\sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k) \cdot t^2$$

Można udowodnić następującą zależność:
Jeśli $\lambda = 0$ nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego to przewidujemy

$$x_s(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k$$

Jeżeli $\lambda = 0$ jest pojedynczym pierwiastkiem równania charakterystycznego to przewidujemy

$$x_s(t) = (\sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k) \cdot t$$

Jeżeli $\lambda = 0$ jest podwójnym pierwiastkiem równania charakterystycznego to przewidujemy

$$x_s(t) = (\sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k) \cdot t^2$$

Przykład 2.5.1. Rozwiązać zagadnienie:

$$\begin{cases} x'' + x' - 2x = t^2 \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$$

Wyznaczymy fundamentalny układ rozwiązań tego równania. Równanie charakterystyczne $\lambda^2+\lambda-2=0$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-2$, zatem

$$x_1(t)=e^t, \qquad x_2(t)=e^{-2t}$$

Wyznaczamy rozwiązanie szczególne $x_s(t)$ metodą przewidywań. 0 nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, więc przewidujemy

$$x_s(t)=At^2+Bt+C$$

Stąd

$$x_s'(t)=2At+B, \qquad x_s''(t)=2A$$

Wstawiając do równania dostajemy:

$$2A+2At+B-At^2-Bt-C=t^2 \iff \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \\ C=-\frac{3}{4} \end{cases}$$

Zatem $x_s(t)=-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t-\frac{3}{4}$. Stąd

$$x(t)=c_1e^t+c_2e^{-2t}+-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t-\frac{3}{4}$$

Wyznaczamy stałe c_1, c_2:

$$c_1=1, \qquad c_2=-\frac{1}{4}$$

Rozwiązanie zagadanienia:

$$x(t)=e^t-\frac{1}{4}e^{-2t}+-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t-\frac{3}{4}$$

Przypadek $f(t)=(\sum_{k=0}^{n}a_kt^k)e^{At}$

Przewidujemy rozwiązanie szczególne

$$x_s(t)=u(t)c^{At}$$

gdzie $u(t)$ jest nieznaną funkcją. Wstawiając $x_s(t)$ do równania różniczkowego otrzymujemy równanie różniczkowe dla funkcji $u(t)$:

$$au''+(2aA+b)u'+(aA^2+bA+c)u=\sum_{k=0}^{n}a_kt^k$$

Podstawienie funkcji u sprowadziliśmy do przypadku 1. Można otrzymać następujące zależności:
Jeżeli $\lambda = A$ nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego to postulujemy, że

$$x_s(t) = (\sum_{k=0}^{n} a_k t^k) e^{At}$$

Jeżeli $\lambda = A$ jest pojedynczym pierwiastkiem równania charakterystycznego to

$$x_s(t) = (\sum_{k=0}^{n} a_k t^k) t e^{At}$$

Jeżeli $\lambda = A$ jest podwójnym pierwiastkiem równania charakterystycznego to

$$x_s(t) = (\sum_{k=0}^{n} a_k t^k) t^2 e^{At}$$

Przypadek $f(t) = (\sum_{k=0}^{n} a_k t^k) \cos(\beta t)$ **lub** $f(t) = (\sum_{k=0}^{n} a_k t^k) \sin(\beta t)$

Przypadek ten sprowadzamy do przypadku 2 przechodząc do funkcji zmiennej zespolonej. Zauważmy, że $\cos(\beta t) + i \sin(\beta t) = e^{i\beta t}$ i rozważmy równanie

$$ax'' + bx' + cx = (\sum_{k=0}^{n} a_k t^k) e^{i\beta t}$$

Jeżeli funkcja $x(t) = u(t) + cv(t)$ jest rozwiązaniem zespolonym powyższego równania to część rzeczywista $u(t)$ spełnia równanie

$$au'' + bu' + cu = (\sum_{k=0}^{n} a_k t^k) \cos(\beta t)$$

zaś część urojona $v(t)$ spełnia równanie

$$av'' + bv' + cv = (\sum_{k=0}^{n} a_k t^k) \sin(\beta t)$$

Można otrzymać następujące równości:
Jeżeli $\lambda = i\beta$ nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego to przewidujemy

$$x_s(t) = W_n(t) \cos(\beta t) + \bar{W}_n(t) \sin(\beta t)$$

Jeżeli $\lambda = i\beta$ jest pierwiastkiem równania charakterystycznego to przewidujemy

$$x_s(t) = W_n(t) t \cos(\beta t) + \bar{W}_n(t) t \sin(\beta t)$$

gdzie

$$W_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k, \qquad \bar{W}_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \bar{\alpha}_k t^k$$

Przypadek $f(t) = (\sum_{k=0}^{n} a_k t^k) e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ **lub** $f(t) = (\sum_{k=0}^{n} a_k t^k) e^{\alpha t} \sin(\beta t)$

Analogicznie jak przypadku 3 można otrzymać następujące zależności:
Jeśli $\lambda = \alpha + i\beta$ nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego to

$$x_s(t) = e^{\alpha t}(W_n(t)\cos(\beta t) + \bar{W}_n(t)\sin(\beta t))$$

Jeśli $\lambda = \alpha + i\beta$ jest pierwiastkiem równania charakterystycznego to

$$x_s(t) = e^{\alpha t}(W_n(t)t\cos(\beta t) + \bar{W}_n(t)t\sin(\beta t))$$

gdzie

$$W_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k, \qquad \bar{W}_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \bar{\alpha}_k t^k$$

Twierdzenie 2.5.1. Jeżeli funkcje $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ są rozwiązaniami odpowiednio równań

$$ax'' + bx' + cx = f_1(x) \quad \text{i} \quad ax'' + bx' + cx = f_2(x)$$

to funkcja $\eta(t) = \varphi(t) + \psi(t)$ jest rozwiązaniem równania

$$ax'' + bx' + cx = f_1(x) + f_2(x)$$

Uwaga 2.5.1. Powyższe twierdzenie zachodzi również dla równań liniowych II rzędu o zmiennych współczynnikach zmiennej t.

Przykład 2.5.2. Rozwiązać równanie $x'' + wx' + x = t + 2x^{3t}$.

Wyznaczamy rozwiązanie ogólnie równania jednorodnego $x'' + 2x' + x = 0$. Równanie charakterystyczne:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \iff (\lambda + 1)^2 = 0$$

zatem $\lambda = -1$ jest podwójnym pierwiastkiem. Stąd układ fundamentalny rozwiązań tworzą funkcje

$$x_1(t) = e^{-t}, \qquad x_2(t) = te^{-t}$$

i rozwiązanie ogólnie równania jednorodnego ma postać:

$$x_{ROJ}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} = e^{-t}(c_1 + c_2 t)$$

Wyznaczamy rozwiązanie szczególnie $x_s(t)$ równania różniczkowego. Wobec poprzedniego twierdzenia rozwiązanie szczególne

$$x_s(t) = x_s^{(1)}(t) + x_s^{(2)}(t)$$

gdzie $x_s^{(1)}(t)$ jest rozwiązaniem szczególnym równania $x'' + 2x' + x = t$, zaś $x_s^{(2)}(t)$ jest rozwiązaniem szczególnym równania $x'' + 2x' + x = 2e^{3t}$, jest rozwiązaniem szczególnym głównego równania.

Wyznaczamy $x_s^{(1)}(t)$ metodą przewidywań (przypadek 1). Przewidujemy

$$x_s^{(1)}(t) = At + b$$

Wstawiamy $x_s^{(1)}(t)$ do równania $x'' + 2x' + x = t$:

$$\frac{d}{dt}x_s^{(1)}(t) = A \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}x_s^{(1)}(t) = 0$$

$$aA + At + B = t \Rightarrow A = 1, B = -2$$

Zatem

$$x_s^{(1)}(t) = t - 2.$$

Wyznaczamy $x_s^{(2)}(t)$ metodą przewidywań (przypadek 2). Przewidujemy

$$x_s^{(2)}(t) = Ae^{Bt}$$

Wstawiamy $x_s^{(2)}(t)$ do równania $x'' + 2x' + x = 2e^{3t}$:

$$\frac{d}{dt}x_s^{(2)}(t) = 3Ae^{3t} \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}x_s^{(2)}(t) = 9Ae^{3t}$$

Stąd

$$9Ae^{3t} + 6Ae^{3t} + Ae^{3t} = 2e^{3t} \Rightarrow A = \frac{1}{8}$$

Więc

$$x_s^{(2)}(t) = \frac{1}{8}e^{3t}$$

Zatem rozwiązanie szczególnie $x_s(t)$ ma postać:

$$x_s(t) = t - 2 + \frac{1}{8}e^{3t}$$

zaś rozwiązanie ogólnie równania głównego ma postać:

$$x(t) = x_{ROJ}(t) + x_s(t) = e^{-t}(c_1 + c_2t) + t - 2 + \frac{1}{8}e^{3t}$$

2.6. Równania liniowe niejednorodne o zmiennych (dowolnych) współczynnikach. Metoda uzmienniania stałych.

Rozważmy równanie niejednorodne

$$x'' + b(t)x' + c(t)x = f(t)$$

Jeżeli funkcje $x_1(t), x_2(t)$ tworzą fundamentalny układ rozwiązań równania jednorodnego $x'' + b(t)x + c(t)x = 0$ to rozwiązanie równania jednorodnego ma postać

$$x_{ROJ}(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$$

gdzie funkcje $c_1(t), c_2(t)$ są rozwiązaniami następującego układu równań:

$$\begin{cases} c_1'(t)x_1(t) + c_2'(t)x_2(t) = 0 \\ c_1'(t)x_1'(t) + c_2'(t)x_2'(t) = f(t) \end{cases}$$

czyli

$$c_1'(t) = \frac{x_2(t)f(t)}{W(t)}, \quad c_2'(t) = \frac{x_1(t)f(t)}{W(t)}$$

gdzie

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}$$

jest wyznacznikiem Wrońskiego układu funkcji $x_1(t), x_2(t)$ i stąd $W(t) \neq 0$ (bo $x_1(t), x_2(t)$ tworzą fundamentalny układ rozwiązań).

Istotnie, wiemy że funkcja $x(t) = c_1x_1(t)+c_2x_2(t)$ jest rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego. Istotą metody uzmienniania stałych jest postulowanie, że rozwiązanie równania niejednorodnego można przestawić w postaci:

$$x(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$$

gdzie $c_1(t), c_2(t)$ są odpowiednio dobranymi funkcjami różniczkowalnymi.

Różniczkując $x(t)$ mamy:

$$x'(t) = c_1'(t)x_1(t) + c_1(t)x_1'(t) + c_2'(t)x_2(t) + c_2(t)x_2'(t) =$$

$$= c_1(t)x_1'(t) + c_2(t)x_2'(t) + c_1'(t)x_1(t) + c_2'(t)x_2(t)$$

Załóżmy, że $c_1'(t)x_1(t)+c_2'(t)x_2(t) = 0$. Wtedy $x''(t) = c_1'(t)x_1'(t)+c_1(t)xc''(t)+c_2'(t)+c_2(t)x_2''(t)$. Zatem funkcja $x(t)$ będzie spełniała równanie niejednorodne jeżeli będą zachodziły zastępujące warunki:

$$c_1'(t)x_1(t) + c_2'(t)x_2(t) = 0 \text{ oraz } c_1'(t)x_1'(t) + c_2'(t)x_2'(t) = f(t)$$

W ten sposób otrzymaliśmy układ równań dla funkcji $c_1(t)$ i $c_2(t)$:

$$\begin{cases} c_1'(t)x_1(t) + c_2'(t)x_2(t) = 0 \\ c_1'(t)x_1'(t) + c_2'(t)x_2'(t) = f(t) \end{cases}$$

Układ ten ma oczywiście jednoznaczne rozwiązanie $c_1'(t)$ i $c_2'(t)$, ponieważ wyznacznik główny (i zarazem wrońskian liniowo niezależnych funkcji $x_1(t)$, $x_2(t)$) jest różny od zera.