Matematyka dyskretna

Notatki z wykładu

http://robert.brainusers.net

17.06.2009

2. Zbiory dominujące w grafach

Oznaczenia:
$N(v)$ — sąsiedztwo wierzchołka v
$N[v] = N(v) \cup \{v\}$ — domknięte sąsiedztwo
$N(S) = \bigcup_{v \in S} N(v)$ — suma sąsiedztw zbioru $S \subset V$
$N[S] = N(S) \cup S$ — domknięta suma sąsiedztw

Definicja 2.1. Zbiór $D \subset V(G)$ nazywamy zbiorem dominującym grafu G jeżeli

$$\bigwedge_{v \in V-D} \quad N(v) \cap D \neq \emptyset$$

Uwaga 2.1. Zbiór $D \subset V(G)$ jest zbiorem dominującym $\iff$ $N[D] = V$.

Definicja 2.2. Zbiór dominujący $D \subset V(G)$ nazywamy minimalnym zbiorem dominującym, jeżeli nie istnieje zbiór dominujący $D' \subset D$, $D' \neq D$. Moc najmniejszego zbioru dominującego oznaczamy $\gamma(G)$ (liczba dominująca grafu G), moc największego zbioru dominującego oznaczamy $\Gamma(G)$.

Twierdzenie 2.1. Zbiór dominujący D jest minimalnym zbiorem dominującym wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego wierzchołka $v \in D$ zachodzi:

1) v jest wierzchołkiem izolowanym w D (jego sąsiedzi nie są elementami D) lub (nie wykluczone)

2) istnieje wierzchołek $w \in V - D$ że w jest prywatnym sąsiadem v, tj.

$$N(w) \cap D = \{v\}$$

Dowód. ($\Rightarrow$) Dowód nie wprost. Załóżmy, że istnieje wierzchołek v, że $N(v) \cap D \neq \emptyset$ i v nie ma prywatnego sąsiada. Wtedy

$$\bigwedge_{w \in N(v)} \quad |N(w) \cap D| > 1$$

Zatem $D - \{v\}$ jest nadal zbiorem dominującym (fałsz, bo miał być minimalny).

($\Leftarrow$) Załóżmy, że D jest zbiorem dominującym i ma jedną z własności 1-2.

1) Załóżmy, że wierzchołek v ma własność 1. Wtedy $D - \{v\}$ nie jest zbiorem dominującym, bo $N(v) \cap (D - \{v\}) = \emptyset$.

2) Załóżmy, że wierzchołek v ma własność 2. Wtedy $D - \{v\}$ nie jest zbiorem dominującym, bo istnieje wierzchołek w (prywatny sąsiad wierzchołka v), który nie ma sąsiada w $D - v$. □

Twierdzenie 2.2. Niech G będzie grafem spójnym, takim że $|V(G)| \geq 2$. Istnieje wtedy zbiór dominujący D, taki że $V - D$ jest również zbiorem dominującym.

Dowód. Pokażemy, że jeżeli D jest zbiorem dominującym, to $V - D$ też jest zbiorem dominującym. Aby to wykazać, należy pokazać że każdy wierzchołek $v \in D$ ma sąsiada w $V - D$.

Jeżeli $v \in D$ nie miałby sąsiada w $W - D$ to nie spełniałby warunków poprzedniego twierdzenie (nie byłby izolowany, nie miałby prywatnego sąsiada), zatem D nie byłby zbiorem dominującym. Stąd muszą istnieć krawędzie łączące wierzchołek v z $V - D$. □

Wniosek 2.3. Niech G będzie grafem bez wierzchołków izolowanych. Wtedy

$$\gamma(G) \ \leq \ \frac{n}{2}$$

Dowód. Niech D będzie najmniejszym zbiorem dominującym grafu G. Wtedy $|D| = \gamma(G)$.

Załóżmy, że $\gamma(G) > \frac{n}{2}$. Wtedy, na podstawie poprzedniego twierdzenia, istnieje zbiór dominujący $D' = V - D$, taki że $|D'| \leq \frac{n}{2}$ (fałsz, bo D jest najmniejszym zbiorem dominującym). Zatem $\gamma(G) \geq \frac{n}{2}$. $\square$

Definicja 2.3. Zbiór $S \subset V(G)$ nazywamy zbiorem niezależnym grafu G jeżeli

$$\bigwedge_{v \in S} N(v) \cap S = \emptyset$$

W każdym grafie zbiór jednowierzchołkowy jest zbiorem niezależnym. Jedynymi grafami, które mają zbiory niezależne jednowierzchołkowe są grafy pełne.

Definicja 2.4. Zbiór niezależny S nazywamy maksymalnym zbiorem niezależnym, jeżeli nie istnieje zbiór niezależny $S' \neq S$, taki że $S \subset S'$.
Moc najmniejszego maksymalnego zbioru niezależnego oznaczamy $i(G)$, moc największego zbioru niezależnego oznaczamy $\beta_0(G)$ (liczba niezależności grafu).

Twierdzenie 2.4. Jeżeli S jest maksymalnym zbiorem niezależnym to jest minimalnym zbiorem dominującym.

Dowód. Pokażemy, że S jest zbiorem dominującym, czyli każdy wierzchołek $v \in V - S$ ma sąsiada w S. Gdyby tak nie było, wierzchołek v można by dołączyć do S i byłby nadal niezależny (sprzeczność z maksymalnością zbioru S).

Minimalność: jeżeli z S usuniemy v to $S - \{v\}$ nie będzie zbiorem dominującym, bo v nie będzie miał sąsiada w $S - \{v\}$ (bo S jest zbiorem niezależnym). $\square$

Wniosek 2.5. Dla dowolnego grafu G zachodzą nierówności

$$\gamma(G) \ \leq \ i(G) \ \leq \ \beta_0(G) \ \leq \ \Gamma(G)$$

przy czym równość zachodzi jedynie dla grafów pełnych.

3. Zbiory totalnie dominujące i spójnie dominujące

Definicja 3.1. Zbiór $X \subset V(G)$ nazywamy totalnie dominującym, jeżeli każdy wierzchołek $v \in V$ ma sąsiada w zbiorze X:

$$\bigwedge_{v \in V} \quad N(v) \cap X \neq \emptyset$$

Moc najmniejszego zbioru totalnie dominującego oznaczamy $\gamma_t(G)$.

Każdy graf bez wierzchołków izolowanych ma zbiór totalnie dominujący.

Definicja 3.2. Zbiór X nazywamy zbiorem spójnie dominującym, jeżeli X jest zbiorem dominującym i każdy podgraf indukowany przez wierzchołki zbioru X jest grafem spójnym.

Moc najmniejszego zbioru spójnie dominującego oznaczamy $\gamma_c(G)$.

Każdy graf spójny ma zbiór spójnie dominujący.

Uwaga 3.1.

$$\begin{aligned} \Delta(G) = n-1 \quad &\Longrightarrow \quad \gamma(G) = 1 = \gamma_c(G), \quad \gamma_t(G) = 2 \\ \Delta(G) < n-1 \quad &\Longrightarrow \quad \gamma(G) \leq \gamma_t(G) \leq \gamma_c(G) \end{aligned}$$

Twierdzenie 3.1. Zbiór totalnie dominujący X jest minimalnym zbiorem totalnie dominującym wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego wierzchołka $x \in X$ zachodzi
1) $X - \{x\}$ ma wierzchołek izolowany, lub (nie wykluczone)
2) wierzchołek x ma prywatnego sąsiada w $V - X$, tj.

$$N(v) \cap X = \{x\}$$

Dowód. ($\Rightarrow$) Dowód nie wprost. Załóżmy, że istnieje wierzchołek x, taki że $X - \{x\}$ nie ma wierzchołka izolowanego oraz x nie ma prywatnego sąsiada. Wtedy

$$\bigwedge_{w \in N(x)} \quad |N(w) \cap X| > 1$$

Zatem $X - \{x\}$ jest nadal zbiorem totalne dominującym (fałsz, bo miał być minimalny).

($\Leftarrow$) Załóżmy, że X jest zbiorem totanie dominującym i ma jedną z własności 1-2.

1) Załóżmy, że wierzchołek x ma własność 1. Wtedy $X - \{x\}$ ma wierzchołek izolowany w. Zatem $X - \{x\}$ nie jest zbiorem totalnie domunującym, bo wierzchołek w nie ma sąsiada w $X - \{x\}$.

2) Załóżmy, że wierzchołek x ma własność 2. Wiedy $X - \{x\}$ nie jest zbiorem totalnie dominującym, bo istnieje wierzchołek w (prywatny sąsiad wierzchołka x), który nie ma sąsiada w $X - \{x\}$. □

Twierdzenie 3.2. Jeżeli G jest n–wierzchołkowym grafem spójnym i $n \geq 3$ to

$$\gamma_t(G) \leq \frac{2}{3}n$$

Twierdzenie 3.3. Jeżeli H jest spójnym podgrafem rozpinającym grafu G to

$$\gamma_c(G) \leq \gamma_c(H)$$

Dowód. Niech D będzie minimalnym zbiorem spójnie dominującym w H. D jest spójny w H, więc jest spójny w G. Stąd D jest zbiorem spójnie dominującym w G, ale niekoniecznie minimalnym, bo graf G ma więcej krawędzi niż graf H. Zatem w G może istnieć minimalny zbiór spójnie dominujący $D' \subset D$. Stąd moc najmniejszego zbioru spójnie dominującego w G jest conajwyżej równa mocy najmniejszego zbioru spójnie dominującego w H. □

Twierdzenie 3.4. Niech G będzie grafem spójnym. Wtedy

$$\gamma_c(G) \leq n - 2, \quad n \geq 3$$

Dowód. Wybieramy drzewo rozpinające T grafu G. Ma ono tyle samo wierzchołków co graf G. T jest drzewem, więc ma conajmniej dwa liście. To, co zostanie po usunięciu dwóch liści będzie nadal grafem spójnym, czyli

$$\gamma_c(T) \leq n - 2$$

Ale T jest podgrafem rozpinającym grafu G, więc na mocy poprzedniego twierdzenia

$$\gamma_c(G) \leq \gamma_c(T)$$

Stąd otrzymujemy nierówność

$$\gamma_c(G) \leq n - 2$$

□

Wniosek 3.5. Niech T będzie n–wierzchołkowym drzewem i niech l oznacza liczbę jego liści. Wtedy

$$\gamma_c(T) = n - l$$

4. Zbiory k-dominujące

Definicja 4.1. Wierzchołek $v \in V - D$ nazywamy k-zdominowanym przez zbiór D, jeżeli

$$|N(v) \cap D| \geq k$$

Zbiór D nazywamy zbiorem k-dominującym, jeżeli każdy wierzchołek $v \in V - D$ jest k-zdominowany przez zbiór D.

Moc najmniejszego zbioru k-dominującego oznaczamy $\gamma_k(G)$.

Zbiór 1-dominujący $\iff$ zbiór dominujący.

Twierdzenie 4.1. Zbiór k-dominujący D jest minimalnym zbiorem k-dominującym wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego wierzchołka $v \in V - D$ zachodzi
1) $|N(v) \cap D| < k$, lub (nie wyklucza)
2) istnieje wierzchołek x, taki że $N(x) \cap D = k$ i wierzchołek x jest sąsiedni z wierzchołkiem v (wierzchołek x jest k-prywatnym sąsiadem wierzchołka v).

Twierdzenie 4.2. Niech G będzie grafem.
1) Jeżeli G nie ma wierzchołków izolowanych to

$$\gamma_t(G) \leq n - \Delta(G) + 1$$

2) Jeżeli G nie ma wierzchołków izolowanych i $\Delta(G) < n - 1$ to

$$\gamma_t(G) \leq n - \Delta(G)$$

5. Grafy krawędziowe

Definicja 5.1. Grafem krawędziowym grafu G nazywamy graf $L(G) = (E, E')$ gdzie $\{e_1, e_2\} \in E' \iff$ krawędzie e_1, e_2 są sąsiednie w G.

$L^2(G) := L(L(G))$

Twierdzenie 5.1. Graf spójny G jest izomorficzny z $L(G) \iff$ graf G jest cyklem.

Twierdzenie 5.2. Niech G i G' będą grafami spójnymi, takimi że $L(G)$ i $L(G')$ są izomorficzne. Wtedy grafy G i G' są izomorficzne, z wyjątkiem gdy jeden z nich to graf K_3 a drugi $K_{1,3}$.

Twierdzenie 5.3. Graf G jest grafem krawędziowym pewnego grafu $\iff$ zbiór jego krawędzi można3 rozbić na podgrafy pełne w taki sposób, że każdy wierzchołek jest w conajwyżej dwóch podgrafach pełnych.

Twierdzenie 5.4. Graf G jest grafem krawędziowym drzewa $\iff$ jest grafem spójnym złożonym z bloków, które są grafami pełnymi, a wierzchołki rozspajające należą do dwóch bloków.

Definicja 5.2. Grafem średnim grafu G nazywamy taki graf $M(G)$, że $V(M(G)) = V(G) \cup E(G)$ oraz $\{u, v\} \in E(M(G))$ jeżeli
1) $u \in V(G),\ v \in E(G),\ u, v$ są incydentne w G lub
2) $u, v \in E(G)$ są sąsiednie w G.

Definicja 5.3. Graf $T(G)$ nazywamy grafem totalnym, jeżeli $V(T(G)) = V(G) \cup E(G)$ oraz krawędź $\{u, v\} \in E(T(G))$ jeżeli
1) $u, v \in V(G)$ są sąsiednie w G lub
2) $u \in V(G),\ v \in E(G),\ u, v$ są incydentne w G lub
3) $u, v \in E(G)$ są sąsiednie w G.

6. Grafy przecięć

Definicja 6.1. Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną niepustych zbiorów. Grafem przecięć rodziny zbiorów $\mathcal{F}$ nazywamy graf otrzymany przez przyporządkowanie każdemu wierzchołkowi zbioru i połączenie wierzchołków, jeżeli zbiory te nie są rozłączne.

7. Grafy przedziałów

Definicja 7.1. Graf G nazywamy grafem przedziałów, jeżeli jego wierzchołki można przyporządkować przedziałom na prostej w taki sposób, że dwa wierzchołki są sąsiednie wtedy i tylko wtedy gdy przydziały nie są rozłączne.

Grafy przedziałów są szczególnym przypadkiem grafów przecięć.

Twierdzenie 7.1. Jeżeli graf G jest grafem przedziałów to każdy jego podgraf indukowany jest grafem przedziałów.

Definicja 7.2. Graf G nazywamy grafem cięciwowym, jeżeli każdy jego cykl długości większej niż 3 ma cięciwę. Inaczej nazywany jest grafem trójkątnym, gdyż składa się z samych trójkątów i wierzchołków wiszących.

Twierdzenie 7.2. Każdy graf przedziałów jest grafem cięciwowym.

Definicja 7.3. Graf G nazywamy tranzytywnie orientowalnym jeżeli istnieje jego orientacja która daje digraf tranzytywny.

Twierdzenie 7.3. G jest grafem przedziałów $\iff$ G jest grafem cięciwowym i jego dopełnienie jest grafem tranzytywnie orientowalnym.