Analiza matematyczna

Całka Lebesgue'a – zadanie domowe

Robert Sulkowski
http://robert.brainusers.net

23.01.2009

Zadanie 1. d) Obliczyć całkę

$$\int_D \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{x}} \right\rfloor \mathrm{d}l_1(x) \qquad \text{gdzie } D = \{x \in \mathbb{R}\colon\ 0 < x \leq 1\}.$$

Niech $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem:

$$f(x) = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{x}} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{\frac{1}{x}} \right\rfloor,$$

gdzie $\lfloor \cdot \rfloor$ oznacza *część całkowitą* liczby rzeczywistej:

$$\lfloor t \rfloor = \max \{m \in \mathbb{Z}\colon\ m \leq t\}.$$

Zbiór D jest lewostronnie otwartym przedziałem prostej rzeczywistej, zatem jest mierzalny względem jednowymiarowej miary Lebesgue'a l_1 i jego miara wynosi 1.

Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych zadanym wzorem:

$$a_n = \frac{1}{n^2}$$

i niech $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem przedziałów postaci $A_n = (a_{n+1},\ a_n]$:

$$\begin{aligned}A_1 &= \left(\frac{1}{2^2},\ 1\right] \\ A_2 &= \left(\frac{1}{3^2},\ \frac{1}{2^2}\right] \\ &\vdots \\ A_k &= \left(\frac{1}{(k+1)^2},\ \frac{1}{k^2}\right] \\ &\vdots\end{aligned}$$

Wtedy wszystkie elementy tego ciągu są parami rozłączne oraz sumują się do całego zbioru D:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}(a_n,\ 1] = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2},\ 1\right] = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2},\ 1\right] = (0,\ 1] = D \tag{1}$$

Ponadto, każdy ze zbiorów A_n jest mierzalny względem l_1, bo jest przedziałem w $\mathbb{R}$, dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Zauważmy, że

$$f(a_n) = \left\lfloor \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{n^2}}} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{n^2} \right\rfloor = \lfloor n \rfloor = n \qquad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Pokażemy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ funkcja f jest stała na przedziałach postaci A_n oraz

$$f(x) = n\ , \qquad x \in A_n.$$

Ustalmy więc $n \in \mathbb{N}$ oraz liczbę rzeczywistą $x \in A_n = (a_{n+1},\ a_n]$. Wtedy

$$0 \ < \ \frac{1}{(n+1)^2} \ < \ x \ \leq \ \frac{1}{n^2}$$

$$n^2 \ \leq \ \frac{1}{x} \ < \ (n+1)^2$$

Stąd

$$n \ \leq \ \sqrt{\frac{1}{x}} \ < \ n+1. \tag{3}$$

Zatem

$$f(x) = \left\lfloor \sqrt{\frac{1}{x}} \right\rfloor = \max\left\{m \in \mathbb{Z}:\ m \leq \sqrt{\frac{1}{x}}\right\} \overset{(3)}{=} n \overset{(2)}{=} f(a_n).$$

Udowodniliśmy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$, dla dowolnej liczby rzeczywistej z przedziału A_n wartość funkcji f wynosi n i jest ona równa wartości funkcji w prawym końcu tego przedziału. Nieformalnie mówiąc, funkcja f na n-tym przedziale jest równa n.

Zdefiniujmy teraz ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funkcji określonych na zbiorze D o wartościach w $\mathbb{R}$ wzorem:

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{jeżeli } x \in A_n, \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Każda z funkcji ciągu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest *funkcją prostą* jako funkcja charakterystyczna zbioru A_n pomnożona przez n.

Zauważmy, że dla dowolnego $x \in A_n$ zachodzi równość $f_n(x) = f(x)$, co znaczy że n-ta funkcja z ciągu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ przyjmuje na przedziale A_n tę samą wartość co funkcja f. Ponadto

$$f(x) \;=\; \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \qquad\qquad \text{dla każdego } x \in \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Stąd, dla każdego $x \in D$ mamy:

$$\begin{aligned} f(x) \;=\; f_{|D}(x) \;&\overset{(1)}{=}\; f_{|\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} f_{|\bigcup_{k=1}^{n} A_k}(x) \;= \\ &=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \end{aligned} \tag{4}$$

To znaczy, że funkcję f na zbiorze D można przedstawić za pomocą szeregu *funkcji prostych* z ciągu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Zajmijmy się teraz całką. Obcięcie funkcji f do zbioru D nie zmieni wartości całki Lebesgue'a, bo całkujemy po tym zbiorze:

$$\int_D f(x)\, \mathrm{d}l_1(x) \;=\; \int_D f_{|D}(x)\, \mathrm{d}l_1(x) \;\overset{(4)}{=}\; \int_D \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

Z twierdzenia o całce szeregu[1]:

$$\int_D \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \int_D f_n(x)$$

Wiemy, że f_n jest funkcją prostą, zatem jej całka po zbiorze D wynosi:

$$l_1(D \cap A_n) \cdot n + l_1(D \setminus A_n) \cdot 0 \quad \overset{A\subseteq D}{=} \quad l_1(A_n) \cdot n \qquad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

[1] Analiza matematyczna 3 (wykład), rozdz. VIII, par. 4, wniosek 1

Miara Lebesgue'a przedziału A_n jest jego długością:

$$l_1(A_n) = a_n - a_{n+1} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \qquad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

W końcu całkę funkcji f po zbiorze D można przedstawić jako sumę szeregu:

$$\int_D f(x)\, \mathrm{d}l_1(x) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \cdot n \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2} - \frac{n}{(n+1)^2}$$

Zauważmy, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2} - \frac{n}{(n+1)^2} \ = \ \frac{1}{1^2} \underbrace{- \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^2}}_{\frac{1}{2^2}} \underbrace{- \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^2}}_{\frac{1}{3^2}} - \ldots \underbrace{- \frac{n-1}{n^2} + \frac{n}{(n)^2}}_{\frac{1}{n^2}} - \ldots \ =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Całka okazała się być sumą nieskończonego szeregu harmonicznego 2-stopnia, który jest zbieżny, a jego sumę można znaleźć w tablicach matematycznych. Zatem całka Lebesgue'a istnieje i jest skończona. Ostatecznie:

$$\int_D f(x)\, \mathrm{d}l_1(x) \ = \ \frac{\pi^2}{6}$$

Do powyższego wyniku można dojść za pomocą intuicyjnej, graficznej interpretacji całki jako pola powierzchni pod wykresem funkcji f. Ponieważ funkcja f na przedziale D jest funkcją schodkową, całkę można utożsamić z sumą wszystkich pól prostokątów o długości będącej szerokością przedziału, na którym funkcja jest stała i wysokości równej wartości przyjmowanej przez funkcję f na tym przedziale — podobnie jak powyżej. Można również zsumować wszystkie pola prostokątów o wysokości 1 (skok wartości funkcji f) i szerokości przedziału $(0, \frac{1}{n^2}]$ równej $\frac{1}{n^2}$ po wszystkich $n \in \mathbb{N}$, przy czym otrzymamy wtedy bezpośrednio szereg harmoniczny drugiego stopnia.